Osaka University Knowledge Archive

Title	分布函數ノ Graphical ナ平均ニ就テ
Author(s)	梯, 鉄次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 221 p.414-p.419
Issue Date	1941-08-16
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74887
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

957 分布函数ノ Graphical ナ平均ニ就テ

梯 鉄次郎（阪大）

二項級数ノ係数即チ $\left(\frac{1}{\xi}+\xi\right)^n$ ノ係数ノ分布ガ $n\to\infty$ ノトキ正規分布ニ従フトイフコトハヨク知ラレタ事デアル。一般ニ

$$\left(\frac{1}{\xi^r}+\frac{1}{\xi^{r-1}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\xi}+1+\xi+\cdots\cdots+\xi^r\right)^n$$

ノ係数モ正規分布ニナル。以下以上ノ事實ヲ含ム一般ナ事柄ニ就テ述ベル。

先ヅ $M_rF(x)$ ナル平均ノ operation ヲ定義スル。即チ

$$M_rF(x)=\frac{1}{r}\left\{F\left(x-\frac{r-1}{2}h\right)+F\left(x-\left(\frac{r-1}{2}-1\right)h\right)+\cdots\cdots+F\left(x+\left(\frac{r-1}{2}-1\right)h\right)+F\left(x+\frac{r-1}{2}h\right)\right\}$$

$$r=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\qquad rh<\infty$$

コヽニ $F(x)$ ハアル randum variable ノ distribution function デアル。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dF(x)=1,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}x\,dF(x)=m,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2dF(x)=d^2$$

$|m|<\infty$, $d^2<\infty$ ヲ假定スル。

例ヘバ

$$M_2F(x)=\frac{1}{2}\left\{F\left(x-\frac{h}{2}\right)+F\left(x+\frac{h}{2}\right)\right\}$$

$$M_3F(x)=\frac{1}{3}\left\{F(x-h)+F(x)+F(x+h)\right\}$$

又 $M_r^n F(x)=M_r(M_r^{n-1}F(x))$ ニテ定義スル。

以下簡単ノタメニ M_r ヲ M ニテ記ス。

以上ノ定義ノモトニ次ノ事實ヲ簡単ニ計算サレル。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d(MF(x))=1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,d(MF(x))=m$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 d(MF(x))=d^2+\sigma^2$$

$$\sigma^2=\frac{h^2}{2r}\left\{(r-1)^2+(r-3)^2+\cdots+(r-2\nu-1)^2\right\};$$

$$r-2\nu-1\geqq 0$$

又 $M^nF(x)$ ニ就テハ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d(M^nF(x))=1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,d(M^nF(x))=m$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 d(M^nF(x)=d^2+n\sigma^2$$

即チ $M^nF(x)$, $n=0,1,2,\text{------}$ が *distribution* function ヲ作ルコトガ分ッタ。

而ルトキ次ノ事ガ云ヘル。

定理 $F(x) = M$ ヲ無限ニ iterate スレバ normal distribution ニ収斂スル。

即チ

$$n \to \infty \quad M^n F(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}\right) \Rightarrow 0$$

コヽニ

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

証明 $F(x)$ ハ distribution function ナル故、ソノ characteristic function ヲ $f(t)$ トス。
同様ニ $M^n F(x)$ ノ characteristic function ヲ $f_n(t)$ ニテ表ハス。

即チ $\quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$

$$f_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d(M^n F(x))$$

トスレバ

$$f_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d(MF(x))$$

$$= \frac{e^{it\left(\frac{r-1}{2}\right)h} + \cdots\cdots + e^{-it\left(\frac{r-1}{2}\right)h}}{r} f(t)$$

$$\frac{e^{it\left(\frac{r-1}{2}\right)h}+\cdots\cdots+e^{it\left(\frac{r-1}{2}\right)h}}{r}=g(t)$$

ヲ定義スレバ

$$f_n(t)=f(t)\left(g(t)\right)^n$$

ナルコトハ容易ニ分ル。

ココニ $g(t)$ ハ characteristic function

ノ條件ヲ滿足シテヰル。

實際之レヨリ distribution function $G(x)$

ヲ求メレバ

$$G(x)=\begin{cases} 0 & -\infty \leqq x < -\frac{(r-1)}{2}h \\ \frac{1}{r} & -\frac{(r-1)}{2}h \leqq x < -\left(\frac{r-1}{2}-1\right)h \\ \frac{2}{r} & -\left(\frac{r-1}{2}-1\right)h \leqq x < -\left(\frac{r-1}{2}-2\right)h \\ \vdots & \\ 1 & \left(\frac{r-1}{2}\right)h \leqq x \leqq \infty \end{cases}$$

以上ニヨリ

$$M^n F(x)=F(x) * \left(G(x)\right)^{n*}$$

ナルコトガ分ッタ。

又 $m<\infty$, $d<\infty$ ナルヲ以テ

central limit theorem ヲ用フレバ

$n \to \infty$ ナルトキ

$$M^n F(x)-\Phi\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}\right) \Rightarrow 0$$

ナルコトが証明サレタ。

〔註〕 特ニ $F(x)$ トシテ

$$F(x)=\begin{cases}0 & -\infty\leqq x<1\\ 1 & 1\leqq x\leqq\infty\end{cases}$$ ヲトレバ

始メニ述ベタ多項式ノ係數ノ分布ニナル。

M ナル *operation* ヲ積分ニヨル平均ノ *operation* 即チ

$$M_\xi F(x)=\frac{1}{2\xi}\int_{x-\xi}^{x+\xi}F(u)\,du$$

ニテ *define* スレバ同様ノコトが云ヘル。

$\boxed{\text{定理}}$ $n\to\infty$ トスレバ

$$M_\xi^n F(x)-\Phi\left(\frac{x}{\sigma'\sqrt{n}}\right)\Rightarrow 0$$

$\boxed{\text{証明}}$ $M_\xi F(x)$ が連續ナ *distribution function* ヲ作ルコトハ明カデアル。

同様ニ $M_\xi^n F(x)$ モ亦連續ナ *distribution function* ヲ作ル。

故ニ $F(x)$ ノ *characteristic function* ヲ $f(t)$

$M_\xi^n F(x)$ ノ *characteristic function* ヲ $f_n(t)$ ニテ表ハセバ

計算ニヨッテ

$$f_1(t)=\frac{e^{it\xi}-e^{-it\xi}}{2it\xi}f(t)=\frac{\sin t\xi}{t\xi}f(t)$$

ナルコトが証明サレタ。

〔註〕特ニ $F(x)$ トシテ

$$F(x)=\begin{cases}0 & -\infty \leqq x < 1\\ 1 & 1\leqq x\leqq\infty\end{cases}$$ ヲトレバ

始メニ述ベタ多項式ノ係數ノ分布ニナル。

M ナル operation ヲ積分ニヨル平均ノ operation

即チ

$$M_\xi F(x)=\frac{1}{2\xi}\int_{x-\xi}^{x+\xi}F(u)\,du$$

ニテ define スレバ同様ノコトが云ヘル。

$\boxed{\text{定理}}$ $n\to\infty$ トスレバ

$$M_\xi^n F(x)-\Phi\left(\frac{x}{\sigma'\sqrt{n}}\right)\Rightarrow 0$$

$\boxed{\text{証明}}$ $M_\xi F(x)$ が連續ナ distribution function ヲ作ルコトハ明カデアル。

同様ニ $M_\xi^n F(x)$ モ亦連續ナ distribution function ヲ作ル。

故ニ $F(x)$ ノ characteristic function ヲ $f(t)$

$M_\xi^n F(x)$ ノ characteristic function ヲ $f_n(t)$

ニテ表ハセバ

計算ニヨッテ

$$f_1(t)=\frac{e^{it\xi}-e^{-it\xi}}{2it\xi}f(t)=\frac{\sin t\xi}{t\xi}f(t)$$

$$\frac{\sin t\xi}{t\xi} = g(t)$$ ト def. スレバ

一般＝ $f_n(t) = f(t)\,(g(t))^n$ ナルコトガ云ヘル。

茲＝ $g(t)$ ハ characteristic function ノ条件ヲ満足スル。

コレヨリ distribution function $G(x)$ ヲ求メレバ

$$G(x) = \begin{cases} 0 & : x \leqq -\xi \\ \dfrac{x}{2\xi} + \dfrac{1}{2} & : -\xi \leqq x \leqq \xi \\ 1 & : \xi \leqq x \end{cases}$$

ガ得ラレル。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, dG(x) = 0$$

$$\sigma'^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, dG(x) = \frac{1}{2\xi}\int_{-\xi}^{+\xi} x^2\, dx = \frac{\xi^2}{3}$$

故＝ $M_\xi^n F(x) = F(x) * (G(x))^{n*}$

central limit theorem ＝ヨリ

$n \to \infty$ ナレバ

$$M_\xi^n F(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma'\sqrt{n}}\right) \Rightarrow 0$$

ナルコトガ証明サレル。